МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА УЧАЩИХСЯ К ИЗУЧЕНИЮ ФИЗИКИ

Чурин Г.Ю.
Старший преподаватель, СПбГУ, г. Санкт-Петербург
Маковская Н.Н.
Методист, ИМЦ Приморского р-на, г.Санкт-Петербург

Учителя физики вынуждены часть необходимых тем по математике «дорабатывать» на своих уроках, это: вектора, пропорции, степени, производная, тригонометрические функции, модули и др. Уменьшение количества учебных часов по физике с 6 часов в неделю до 2-х часов делают проблемной возможность «доучивания» математики. Усугубляет проблему «нестыковка» тем, когда учителя физики опережают изучение математиками Но главная причина видится в отходе от классических методов обучения математике учащихся в средней школе, изменения в программе с уменьшением познаний по тригонометрии и изъятие из школьной программы черчения породили проблемы в качестве знаний не только по математике, но и по смежным предметам, прежде всего, таким как физика... Авторы предлагают частичное возвращение к прежнему представлению некоторых тем при изучении математики, что возможно поможет более качественному усвоению материала и снятию напряжённости в использовании математического аппарата при изучении других предметов, например физики.[1,2]

Пусть $\mathcal{R}$ – множество всех вещественных (действительных) чисел.

Модуль – это числовая функция, которая $\forall$ любому числу $x \in \mathcal{R}$, ставит в соответствие число

из $\mathcal{R}$, обычно обозначаемое через $|x|$.

Чаще всего определяют модуль следующим образом

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Эквивалентным является следующее определение:

$|x| = max\{x, -x\}$ - т.е. $|x|$ - это наибольшее из двух чисел x и $-x$

Пример:

1) $|-6| = max\{-6{,}6\} = 6.$

Пусть $f(x),\ x \in \mathcal{R}$ – какая-нибудь числовая функция. Тогда, согласно определению,

$$|f(x)| = max\{f(x), -f(x)\}$$

или

$$|f(x)| \equiv \begin{cases} f(x), \text{если } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{если } f(x) < 0 \end{cases}$$

Пример: $|2 \cdot x - 1| = \begin{cases} 2 \cdot x - 1, \text{если } 2 \cdot x - 1 \geq 0, \text{т. е. } x \geq \frac{1}{2} \\ -2 \cdot x + 1, \text{если } 2 \cdot x - 1 < 0, \text{т. е. } x < \frac{1}{2} \end{cases}.$

$$|\sin(x)| = \begin{cases} sin(x), \text{если } \sin(x) \geq 0 \\ -\sin(x), \text{если } \sin(x) < 0 \end{cases}$$

$$\left|\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right)\right| = |-1| = 1.$$

Числовая прямая

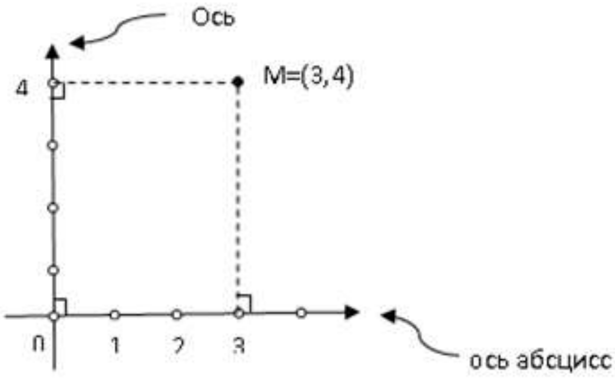
Множество всех вещественных чисел $\mathcal{R}$ можно ассоциировать с точками какой-либо прямой l, если на этой прямой ввести координаты. С этой целью на прямой l фиксируется точка О. (Это т.н. начало координат) и её координатой считается число 0. $(\cdot)0$ разбивает l на два луча. Обозначим их через l^- и l^+. На l^+ фиксируем ещё одну точку, координату которой объявляем числом 1. (За этой точкой сохраняется обозначение 1). Расстояние от 0 до 1 определяет единицу длины на прямой l. Координаты всякой точки, лежащей на l^+ , полагают расстояние от этой точки до $(\cdot)0$.

Координаты всякой точки, лежащей на l^- , это тоже расстояние от неё до $(\cdot)0$, но взятое со знаком “-“. Введённые таким образом координаты точек на прямой l , устанавливают взаимно-однозначное соответствие между числами из $\mathcal{R}$ и точками прямой l, а сама прямая l называется в этом случае числовой прямой (или числовой осью).

Отметим, что расстояние между двумя точками с координатами x_1 и x_2 равно $|x_2 - x_1|$.

В частности $|x|$ – это расстояние от $(\cdot)$ с координатой x до $(\cdot)0$ - начала координат.

Декартовы координаты на плоскости, расстояние между точками, уравнение окружности.



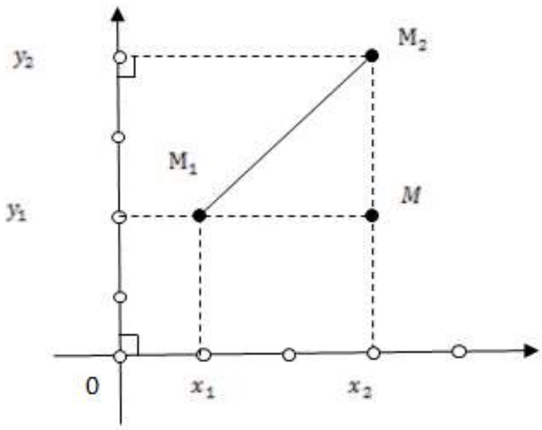
В отличии от прямой, множество точек на плоскости $\mathcal{P}$ отождествляется с множеством упорядоченных пар чисел (x,y), т.е. с множеством $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}\times\mathcal{R}$. Обычно это достигается введением декартовых координат на плоскости $\mathcal{P}$, см. рис. Эта пара чисел, называется декартовыми координатами точки на плоскости $\mathcal{P}$, при этом $1^{ое}$ число пары называется абсциссой, а второе ординатой точки.

Данный рисунок иллюстрирует, как по точке найти её координаты и, наоборот, как по координатам найти соответствующую точку.

Знание координаты точек M_1 и M_2 на плоскости $\mathcal{P}$ позволяет легко найти расстояние между ними. Это расстояние чаще всего обозначается $|M_1M_2|$. (Не путать с модулем числа!)

Действительно, если (x_1, y_1) координаты M_1, а (x_2, y_2) координаты M_2, то

$$|M_1M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y)^2$$



эта формула легко получается из теоремы Пифагора, если отрезок M_1M_2 сделать

гипотенузой прямоугольного треугольника $M\,M_1M_2$, где M – точка с координатами (x_2, y_1).

(См. рис).

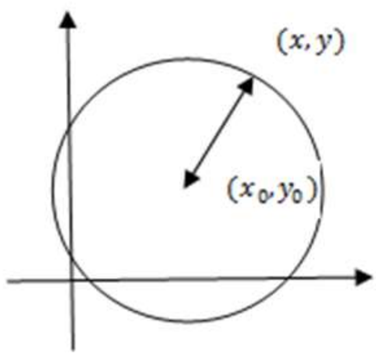
Последняя формула позволяет легко выразить через координаты уравнение окружности радиуса r с центром в точке координатами (x_0, y_0).

Действительно – указанная окружность это множество всех точек на плоскости $\mathcal{P}$, координаты (x, y) которых, удовлетворяют

уравнению:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

<u>Функции и их графики.</u>

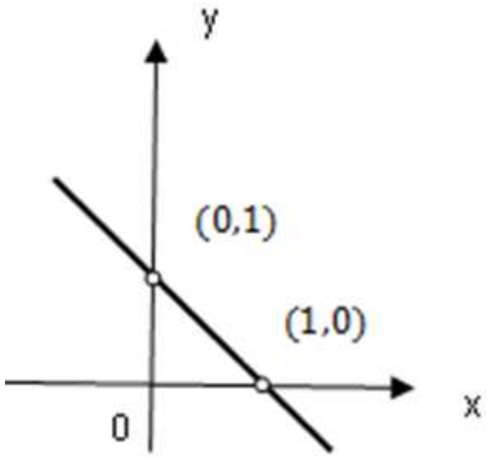


Пусть I – какое либо множество чисел, лежащих в $\mathcal{R}$, (не исключается $I = \mathcal{R}$). Числовой функцией на I называется некий закон f, по которому каждому числу $x \in I$, ставится число $f(x) \in \mathcal{R}$. Математики это обычно записывают в виде:

$$I \xrightarrow{f} \mathcal{R}$$

Графиком функция f называют множество всех точек на $\mathcal{R}^2$, координаты (x, y), которых удовлетворяют равенству:

$$y = f(x),\ x \in I.$$



Функция f называется <u>*линейной*</u>, если $I = \mathcal{R}$ и $f(x) = a \cdot x + b$, где a *и* b – какие-нибудь фиксированные вещественные числа. Причиной этого является тот факт, что её график:

$$y = a \cdot x + b, \qquad x \in \mathcal{R}$$

представляет на $\mathcal{R}^2$ прямую линию.

Пример: $y = -x + 1$

Легко убедиться, что любая прямая на $\mathcal{R}^2$, кроме «вертикальной» (т.е.перпендикулярной оси абсцисс) является графиком линейной **функции.**

Линейная функция вида $f(x) = a \cdot x$, где a – некоторое фиксированное число, называют однородной линейной функцией или, в случае $a \neq 0$, (прямой) пропорциональностью. Число a называется в этом случае коэффициентом пропорциональности.

Точнее. говорят, что y пропорционально $x \in I$ с коэффициентом пропорциональности a, если

$$\frac{y}{x} = a \text{ при } \forall\, x \in I \text{ или } y = a \cdot x, \;\; x \in I$$

Из определения графика следует, что график пропорциональности – это часть (кусок) прямой

$$y = a \cdot x, \;\; x \in \mathcal{R}$$

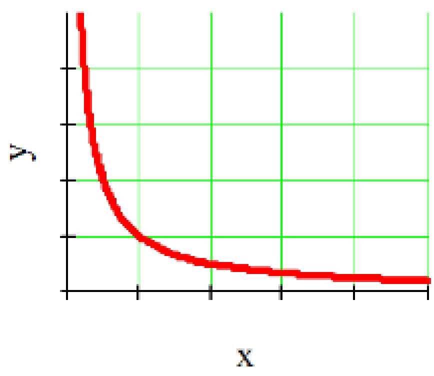
Отсюда и название – прямая пропорциональность.

Пусть число $a \neq 0$ (чаще $a > 0$)

Говорят, что y – обратно пропорционально $x \in I$ с коэффициентом пропорциональности a, если $y = \frac{a}{x}$ при $\forall\, x \in I$

Название становится понятным, если вспомнить, что $\frac{1}{x}$ называется обратным числу $x(\neq 0)$. Таким образом, y прямо пропорционально не x, а обратному ему числу $\frac{1}{x}$.

График обратной пропорциональности, рассматриваемой как график функции $y = \frac{a}{x}$ при $\forall\, x \in \mathcal{R}^+ = (0, +\infty)$ имеет вид т.н. гиперболы.



УПРАЖНЕНИЕ К ТЕМЕ (ПРЯМАЯ) ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – последовательность каких-либо чисел $(\neq 0)$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ – также последовательность чисел, такая что $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n}$

Упр: Докажите, что $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{x_1 + x_2 + \cdots x_n}$, если $x_1 + x_2 + \cdots x_n \neq 0$, т.е., что отношение не меняется, если в нем сложить отдельно числители и отдельно знаменатели. (Это так называемое правило отношений.)

К теме модуль. Изобразить график функции $y = |x|$, $x \in \mathcal{R}$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Как уже отмечалось задание функции f равносильно заданию её графика на $\mathcal{R}^2$, которое определяется равенством $y = f(x), \quad x \in I$

Значительную сложность у школьников вызывают тригонометрические функции sin и cos.
Первоначальное понятие этих объектов связано с геометрией прямоугольного треугольника: отношение длин одного из катетов к гипотенузе.
Отсюда приходят к понятию геометрических sin и cos от величины угла, выраженного в градусах или радианах. Кстати эти величины (прямо) пропорциональны друг к другу и связаны равенством

$$\frac{\text{радиан угла}}{\text{градус угла}} = \frac{\pi}{180},$$

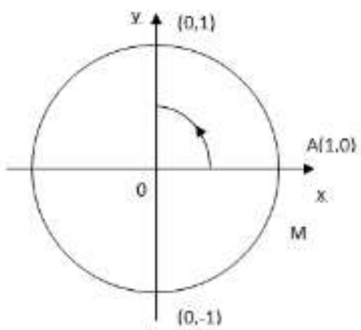
где π - это очень интересное иррациональное число, примерно равное 3.14…
Заметим при этом, что величины углов (не считая сверх развернутых) мерялись в градусах от 0° до 180° и, соответственно, в радианах от 0 до π радиан.

Тригонометрические sin и cos в отличии от геометрических, являются числовыми функциями

$$\mathcal{R} \xrightarrow{sin} \mathcal{R} \quad \text{и} \quad \mathcal{R} \xrightarrow{cos} \mathcal{R}$$

заданными на числовой прямой $\mathcal{R}$.

Так, график функции $y = \sin(x), \quad x \in \mathcal{R}$ представляют на $\mathcal{R}^2$ некоторую кривую, называемую синусоидой. Вам, по-видимому, хорошо известно, что график $y = \cos(x), \quad x \in \mathcal{R}$ очень похож на синусоиду.



Почему это так? Почему $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ при $\forall x \in \mathcal{R}$. Почему эти функции периодические: $\cos(x + 2 \cdot \pi) = \cos(x)$, $\sin(x + 2 \cdot \pi) = \sin(x)$? легче понять, если воспользоваться следующим “наглядным” определением этих функций.

С этой целью на $\mathcal{R}^2$ рассмотрим окружность $x^2 + y^2 = 1$. (См. рис.) – это окружность радиуса 1 с центром в $(\cdot)$O. Наряду с ней рассмотрим числовую прямую $\mathcal{R}$, т.к. x и y заняты, то координаты точек на $\mathcal{R}$ будем обозначать через t. Наша цель определить для $\forall t \in \mathcal{R}$, что такое sin($t$) и cos($t$). Зафиксировав число t, а вместе с ним и точку на $\mathcal{R}$ отрезаем нитку с началом в 0 и концом в t. Её длина равна расстоянию от 0 до t, т.е. $|t|$. Совместим начало нитки с $(\cdot)$A с координатой (1,0) на окружности $x^2 + y^2 = 1$ и начинаем её мотать по окружности против часовой стрелки, если $t>0$, и по часовой стрелке, если $t<0$.
В случае, если t=0, наматывать не надо, т.к. нитка будет иметь нулевую длину, её начало и конец останутся в $(\cdot)$A=(1,0).

После наматывания конец нитки окажется в некоторой точке М на окружности $x^2 + y^2 = 1$

При этом этот конец, т.е. $(\cdot)$М будет зависеть от выбора числа $t \in \mathcal{R}$, от этого числа будут зависеть и координаты точки $(\cdot)$М.

Определение: абсцисса точки М называется cos(*t*), а ордината $(\cdot)$М называется sin(*t*).

Как нетрудно видеть, определение коротко и наглядно определяет cos и sin как числовые функции от $\forall$ числа $t \in \mathcal{R}$.

Из определения следует:

1. cos(0)=1, sin(0)=0
2. Т.к. при $\forall t$ $(\cdot)$М лежит на окружности $x^2 + y^2 = 1$, то её координаты (cos(*t*), sin(*t*) удовлетворяют равенству
$$\cos^2 x + sin^2 x = 1 \text{ при } \forall t \in \mathcal{R}.$$
3. Известно, что длина окружности радиуса *r* равна $2 \cdot \pi \cdot r$, поэтому длина окружности $x^2 + y^2 = 1$ равна $2 \cdot \pi$. Поэтому, если мы нашу нитку с началом в $(\cdot)0$ и концом в $(\cdot)t$ удлиним или укоротим на $2 \cdot \pi$, т.е. *t* заменим на t+$2 \cdot \pi$ или t-$2 \cdot \pi$, то после наматывания конец новой нити совпадет с исходной нитью. Отсюда следует, что $\cos(t + 2 \cdot \pi) = \cos(t)$, $\sin(t + 2 \cdot \pi) = \sin(t)$ при $\forall\, t \in \mathcal{R}$/

   Функции, обладающие указанным свойством, называют периодическими, а число $2 \cdot \pi$ - называют их периодом
4. $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$, $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$
5. $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$
6. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
7. $\cos(-t) = \cos(t)$ чётная функция, $\sin(-t) = -\sin(t)$ нечётная функция при $\forall t \in \mathcal{R}$
8. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
9. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Формулы 4) – 9) легко следуют из нашего определения. Оставим их в качестве упражнений.
Замечание: наряду с 4) – 9) можно попытаться установить и другие.

Среднее арифметическое и среднее геометрическое

Пусть a_1 и a_2 - положительные числа

Опр.1. Число $\frac{a_1 + a_2}{2}$ называется их средним арифметическим

Опр.2. Число $\sqrt{a_1 \cdot a_2}$ называют их <u>средним геометрическим</u>

Упр. Докажите, что всегда
$\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}$ При этом равенство возможно лишь в случае $a_1 = a_2$ Замечание

1.Понятие среднего арифметического и среднего геометрического можно вводить для набора, состоящего из более чем двух чисел (См. справочники).
Замечание 2: Если a_1 и a_2 - координаты точек A_1 и A_2 на числовой прямой $\mathcal{R}$, то $\frac{a_1 + a_2}{2}$ - это

координата середины отрезка $A_1 A_2$. (Упражнение).

Список литературы:

1. Андрей Петрович Киселев Арифметика, Алгебра, Геометрия. 1971, 2002 – 2006.
2. Киселев А. П. Геометрия. Планиметрия. Стереометрия. Учебник под ред. и с дополнениями профессора Н.А. Глаголева. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 328 с. - ISBN 5-9221-0367-9.